

Infos :

- ◊ Vidéo cours mercredi - des problèmes techniques subsistent?
- ◊ Début du support sur le forum (tous les mardi après-midi)

Définition 0.52 : Exponentielle et logarithme.

On définit l'exponentielle  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ ,  $\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$

ou  $\exp(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

On écrit également  $e^x = \exp(x)$  car si  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}$  est la constante d'Euler ( $e \approx 2,7...$ ) et  $n \in \mathbb{Z}$ , alors,

$$e^n = \exp(n)$$

L'exponentielle est inversible et on définit le logarithme comme son inverse :  $\log: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  tq  $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$   $e^{\log(x)} = x$  et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\log(e^x) = x$ .

### Remarque 0.53

(i) On peut se servir des propriétés de l'exponentielle pour définir  $a^b$  où  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

$$a^b = e^{b \cdot \log(a)}$$

(ii) Des fois, la notation  $\log$  est réservée pour le logarithme en base 10.

Dans ce cours, toutes les notations  $\log$ ,  $\text{Log}$ ,  $\ln$ ,  $\text{Ln}$  font toujours référence au logarithme en base  $e$ .

### §0.6 Techniques de démonstration

Théorème 0.58 : Démonstration par récurrence.

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $P(n)$  un énoncé / une propriété qui peut être

Soit vrai soit fausse et tq

(i)  $P(n_0)$  est vraie (Ancrage/Initialization)

(ii)  $\forall n \geq n_0, P(n) \Rightarrow P(n+1)$  (Pas de récurrence/Pas d'induction/hérédité)

Alors,  $\forall n \geq n_0, P(n)$  est vraie.

Exemples 0.59

(ii) Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot (n+2)^2$

Questions: Qui est  $n_0$ ? qui est  $P(n)$ ?

$$P(n) = \left" \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2 (n+2)^2 \right"$$

$n_0$  est le plus petit  $n$  dans l'énoncé

$$n_0 = 0$$

$$P(n) = ? \quad P(n+1) ?$$

$$P(n) = \left" \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4} (n+1)^2 (n+2)^2 \right"$$

$$P(0) = \left" \sum_{k=1}^{0+1} k^3 = \frac{1}{4} (0+1)^2 (0+2)^2 \right"$$

← Faire preuve de la même intelligence qu'un scanner

$$P(n+1) = \left" \sum_{k=1}^{(n+1)+1} k^3 = \frac{1}{4} ((n+1)+1)^2 ((n+1)+2)^2 \right"$$

Ancreage: à montrer:  $\left" \sum_{k=1}^{0+1} k^3 = \frac{1}{4} (0+1)^2 (0+2)^2 \right"$

Le membre de gauche est

$$\sum_{k=1}^1 k^3 = 1^3 = 1. \quad \text{Le membre de droite est } \frac{1}{4} (1)^2 \cdot (2^2) = 1.$$

On obtient la même chose, l'ancreage est démontré.

Pas de récurrence : On suppose que  $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$  (H.R.)

et on montre  $\sum_{k=1}^{n+2} k^3 = \frac{1}{4}(n+2)^2(n+3)^2$

$$\sum_{k=1}^{n+2} k^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + \sum_{k=n+2}^{n+2} k^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 + (n+2)^3$$

H.R.  $\frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2 + (n+2)^3$

$$= (n+2)^2 \left( \frac{1}{4}(n+1)^2 + n+2 \right) = \frac{1}{4}(n+2)^2 (n^2 + 6n + 9)$$

$$= \frac{1}{4}(n+2)^2 (n+3)^2$$

qui est le résultat voulu.

(i) Montrons que  $\forall x \neq 1, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

où par convention,  $\forall x, x^0 = 1$ .

$n_0 = ?$   $P(n) = ?$   $P(n_0) = ?$   $P(n+1) = ?$

$\downarrow$   
 $n_0 = 0$

$\downarrow$   
"  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  "

$$P(0) = " \sum_{k=0}^0 x^k = \frac{1-x^{0+1}}{1-x} "$$

$$P(n+1) = " \sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{(n+1)+1}}{1-x} "$$

Soit  $x \neq 1$  quelconque.

Initialisation: À montrer:  $\sum_{k=0}^0 x^k = \frac{1-x^1}{1-x}$ .

Le membre de gauche est

$$\sum_{k=0}^0 x^k = x^0 = 1 \quad \text{et le membre de droite est } \frac{1-x}{1-x} = 1.$$

Une qu'on obtient la même chose, le résultat est vrai pour  $n=0$ .

Pas de récurrence: Supposons que  $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$  (H.R.)

et montrons que  $\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$ .

$$\begin{aligned} \text{On a} \quad \sum_{k=0}^{n+1} x^k &= \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} \stackrel{\text{H.R.}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-\cancel{x^{n+1}} + \cancel{x^{n+1}} - x^{n+2}}{1-x} \\ &= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \end{aligned}$$

qui est le résultat voulu.

# Chapitre 1 : Les nombres réels.

## § 1.1 Rapports

Définition 1.1 : (La droite réelle  $\mathbb{R}$ )

$\mathbb{R}$  est la droite réelle, on peut la voir comme l'ensemble des nombres à virgule

$$x = a, a_1 a_2 a_3 \dots \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{Z}, \quad \forall k \geq 1, a_k \in \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, 9\}$$

De plus, par convention

$$x = a, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k 999999 \dots = a, a_1 a_2 \dots a_{k-1} (a_k + 1) 0000 \dots$$

Définition 1.2 : Valeur absolue

La valeur absolue est la fonction  $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

### Proposition 1.3

Soient  $x, y \in \mathbb{R}$ ,  $c \geq 0$ . On a

(i)  $x \leq |x|$

(ii)  $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$

(iii)  $|x| = 0$  si et seulement si  $x = 0$

(iv)  $|-x| = |x|$

(v)  $|xy| = |x||y|$

(vi)  $|x \pm y| \leq |x| + |y|$

inégalité du triangle

(vii)  $|x \pm y| \geq ||x| - |y||$

inégalité du triangle inverse.

## Définition 1-4 : Intervalle

un intervalle est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$  ayant la forme

$$]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

$$]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$$

$$]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

$$]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$$

$$]a, a[ = \emptyset$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

$$[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$$

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$$

$$[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

Intervalle ouvert

Intervalle fermé.

## § 1.2. Suprémum, infimum, maximum & minimum

Définition 1.5: (minoré, minorant, majoré, majorant, borné)

Soit  $A \subseteq \mathbb{R}$  un ensemble non-vide.

(i)  $x \in \mathbb{R}$  est un minorant de  $A$  si  $\forall a \in A, x \leq a$ .

(ii)  $x \in \mathbb{R}$  est un majorant de  $A$  si  $\forall a \in A, a \leq x$ .

(iii) On dit que  $A$  est minoré si il admet un minorant, i.e.

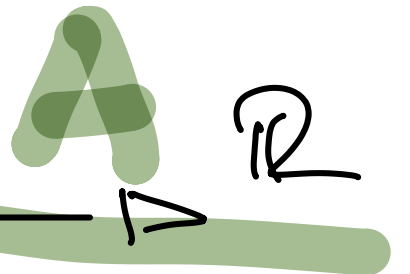
$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall a \in A, x \leq a.$$

(iv) On dit que  $A$  est majoré si il admet un majorant, i.e.

$$\exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall a \in A, a \leq x.$$

(v) On dit que  $A$  est borné si il est minoré & majoré.

un minorant  
si aucun élément  
de  $A$  est à gauche de  $x$



Exemples 1.7 (i)  $A = \mathbb{N}$  est minoré, mais pas majoré.

$\mathbb{N}$  est minoré: à montrer  $\exists x \in \mathbb{R}$  tq  $\forall n \in \mathbb{N}, x \leq n$ .

Posons  $x = -1$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  quelconque. Alors,

$$n \geq 0 \geq -1 = x.$$

$n$  étant quelconque, on a le résultat

$\mathbb{N}$  n'est pas majoré:  $\neg (\mathbb{N} \text{ majoré})$

$$= \neg (\exists x \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \leq x)$$

$$= \forall x \in \mathbb{R}, \neg (\forall n \in \mathbb{N}, n \leq x)$$

$$= \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } \neg (n \leq x)$$

$$= \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tq } n > x$$

Soit  $x \in \mathbb{R}$  quelconque. Posons  $n = \lceil |x| \rceil + 1$ .

où  $\lceil y \rceil$  = partie entière supérieure.

$$\lceil 3,5 \rceil = 4, \quad \lceil 9 \rceil = 9, \quad \lceil 14,1 \rceil = 15, \quad \lceil 2 \rceil = 2$$

Alors,

$$x \leq |x| \leq \lceil |x| \rceil < \lceil |x| \rceil + 1 = n.$$

$x$  étant quelconque, on a le résultat.